2014학년도 논술 고사

자연계열

[문제1] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 주어진 대상 중에서 여러 가지 정해진 조건을 동시에 만족하지 않는 원소의 개수를 구해보자. 만약 주어진 조건들을 만족하는 것들의 개수를 쉽게 구할 수 있는 경우라면 이를 이용하여 원하는 결과를 얻을 수 있다. 예를 들어 1부터 10^4 까지의 자연수 중 4의 배수도 6의 배수도 아닌 것의 개수를 구하는 일을 생각해보자, 4의 배수이고 동시에 6의 배수인 것의 개수를 구하는 일은 어렵지 않으나, 4의 배수도 아니고 6의 배수도 아닌 것의 개수를 구하는 일은 조금 더 어려워 보인다. 이런 문제를 해결하는 좋은 방법으로 잘 알려진 다음 정리가 있다. 유한집합 S에 대하여 $n(S)$는 집합 S의 원소의 개수를 나타낸다고 하자.

정리 1. 유한집합 U와 U에서의 두 조건 p_1, p_2가 주어졌다고 하자. 조건 p_1, p_2의 진리집합을 각각 A_1, A_2, 그리고 $N_1 = n(A_1)+n(A_2)$, $N_2 = n(A_1 \cap A_2)$ 라고 하면 다음이 성립한다: $n(A_1^c \cap A_2^c) = n(U) - N_1 + N_2$

이는 $n(A_1^c \cap A_2^c) = n(U-(A_1 \cup A_2)) = n(U) - n(A_1 \cup A_2)$와
$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1)+n(A_2)-n(A_1 \cap A_2)$ 를 이용하여 쉽게 확인할 수 있다:

$$n(A_1^c \cap A_2^c) = n(U) - n(A_1) - n(A_2) + n(A_1 \cap A_2) = n(U) - N_1 + N_2$$

정리 1은 자연스럽게 여러 개의 조건을 가지는 일반적인 정리로 확장할 수 있으며 다음은 네 개의 조건이 주어진 경우이다.

정리 2. 유한집합 U와 U에서의 네 개의 조건 p_1, p_2, p_3, p_4가 주어졌다고 하자. 조건 p_i, $1 \le i \le 4$, 의 진리집합을 A_i라고 할 때, $k = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여 N_k를 가능한 모든 k개의 서로 다른 A_i들의 모임에 대해 그들의 교집합의 원소의 개수를 더한 값이라 정의하면 다음이 성립한다:

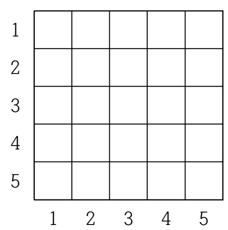
$$n(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = n(U) - N_1 + N_2 - N_3 + N_4$$

정리 2에서 조건 p_4를 '$x \ne x$'라고 하면 $A_4 = \varnothing$, $A_4^c = U$ 이고 따라서 $N_4 = 0$이며 조건이 세 개인 정리를 얻을 수 있다.

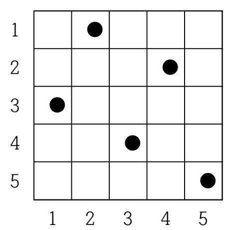
예제 1. 집합 $A = \{a, b, c, d\}$ 에서 집합 $B = \{1, 2, 3\}$ 로의 전사함수(공역과 치역이 같은 함수)의 개수를 구해보자. 전체집합 U 를 A에서 B로의 모든 함수의 집합이라 하자. $i = 1, 2, 3$에 대하여 U에서의 조건 p_i를 'i가 함수 $f \in U$ 의 치역의 원소가 아니다' 라고하면 조건 p_i 의 진리 집합 A_i 는
$\{f \in U \mid f\text{의 치역은 } B - \{i\}\text{의 부분집합}\}$ 이며 A_i^c 는 i를 함숫값으로 가지는 함수들의 집합이다. 따라서 $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$은 1, 2, 3을 모두 함숫값으로 가지는

함수들의 집합, 즉 전사함수들의 집합이며 구하고자 하는 수는 $n(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)$ 이다.
이제 $n(U) = 3^4$, $N_1 = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 3 \cdot 2^4$
$N_2 = n(A_1 \cap A_2) + n(A_2 \cap A_3) + n(A_3 \cap A_1) = 3$, $N_3 = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$ 이므로
정리 2에 의하여 $n(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = n(U) - N_1 + N_2 - N_3 = 3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 - 0 = 36$
이다.

(나) n이 자연수일 때, 가로로 n칸 세로로 n칸이 있는 체스판을 $B(n)$이라고 하자; (그림1)은 $B(5)$이다. 여러 가지 문제를 체스판 $B(n)$에 특정한 조건을 만족하도록 바둑돌을 놓는 방법의 수를 구하는 문제로 바꾸어 생각할 수 있다.



(그림 1)



(그림 2)

각 행과 각 열에 하나의 돌만 있도록 $B(n)$에 n개의 돌을 놓는 방법은 $\{1, 2, \cdots, n\}$에서 $\{1, 2, \cdots, n\}$으로의 일대일 대응으로 이해할 수 있다: $B(n)$의 i행에 놓여진 돌이 위치한 열의 번호를 i에 대응되는 수로 정하면 $\{1, 2, \cdots, n\}$에서 $\{1, 2, \cdots, n\}$으로의 일대일 대응을 얻을 수 있다. 예를 들어 (그림 2)의 방법은 1을 2로, 2를 4로, 3을 1로, 4를 3으로, 5를 5로 대응시키는, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$으로의 일대일 대응으로 이해할 수 있다.
각 행과 각 열에 한 개씩의 돌이 있도록 $B(n)$에 n개의 돌을 놓는 방법의 수를 계산해 보자. 돌을 1행에 놓을 수 있는 자리는 n개, 1행에 돌을 놓은 후 2행에 돌을 놓을 수 있는 자리는 $(n-1)$개, ... 이렇게 계산해 보면 $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 가지의 방법이 있음을 알 수 있다.

[문제 1-1] <10 점> **정리** 1을 이용하여 1부터 10^4까지의 자연수 중 4의 배수도 6의 배수도 아닌 것의 개수를 구하라.

[문제 1-2] <20점> (그림 3)의 체스판에 **4개**의 돌을 각 행과 각 열에 많아야 한 개 놓는 방법들의 집합을 U라 하고, $i=1,2,3,4,5$에 대하여 U의 원소 중 E_i 에 반드시 돌을 놓는 방법들의 집합을 A_i라 하자.

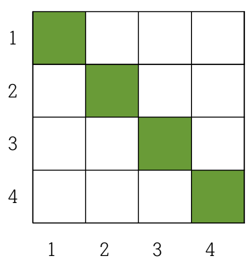
1) <15점> $n(A_1)$을 구하라.

2) <5점> $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c$ 의 원소는 어떤 방법인지 설명하라.

1					E_1
2				E_2	
3	E_3				
4		E_4			
5			E_5		
	1	2	3	4	5

(그림 3)

[문제 1-3] <20점> (그림 4)의 체스판에 **4개**의 돌을 각 행과 각 열에 하나의 돌만 있도록 놓는 방법을 생각해 보자. 검게 칠해져 있는 자리에는 돌을 놓을 수 없다면 몇 가지 방법이 있는지 제시문 (가)의 정리를 이용하여 구하라.



(그림 4)

[문제2] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 리처드 파인만은 소년시절에 다음의 기묘한 식을 배우고 언제나 기억했다고 알려져 있다.

$$\cos(20^\circ)\cdot\cos(40^\circ)\cdot\cos(80^\circ)=\frac{1}{8} \qquad (ㄱ)$$

이는 삼각함수의 덧셈정리를 통하여 확인할 수 있다. 잘 알려진 사인과 코사인의 덧셈정리는 다음과 같다.

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

이들로부터 탄젠트의 덧셈정리, 사인과 코사인의 합·차를 곱으로, 또는 곱을 합·차로 고치는 공식들과, 삼각함수의 배각 및 반각 공식들을 유도할 수 있다. 삼각함수의 곱을 합·차로 고치는 공식을 이용하여 식 (ㄱ)을 아래와 같이 확인할 수 있다.

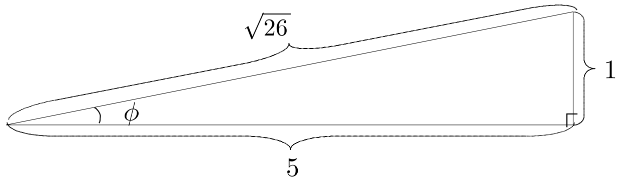
$$\begin{aligned}\cos(20^\circ)\cdot\cos(40^\circ)\cdot\cos(80^\circ)&=\frac{1}{2}\left(\cos(100^\circ)+\cos(60^\circ)\right)\cdot\cos(40^\circ)\\&=\frac{1}{2}\cos(100^\circ)\cdot\cos(40^\circ)\\&\quad+\frac{1}{2}\cos(60^\circ)\cdot\cos(40^\circ)\\&=\frac{1}{4}\left(\cos(140^\circ)+\cos(60^\circ)\right)+\frac{1}{4}\cos(40^\circ)\\&=\frac{1}{4}\cos(60^\circ)+\frac{1}{4}\left(\cos(140^\circ)+\cos(40^\circ)\right)\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

한편, 식 (ㄱ)은 사인 함수에 대한 배각의 공식을 이용하여 보일 수도 있다. 배각의 공식을 반복하여 적용하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\sin(20^\circ)\cdot\cos(20^\circ)\cdot\cos(40^\circ)\cdot\cos(80^\circ)&=\frac{1}{2}\sin(40^\circ)\cdot\cos(40^\circ)\cdot\cos(80^\circ)\\&=\frac{1}{4}\sin(80^\circ)\cdot\cos(80^\circ)\\&=\frac{1}{8}\sin(160^\circ)\end{aligned}$$

$\sin(20^\circ)=\sin(160^\circ)$이므로 이로부터 식 (ㄱ)을 얻을 수 있다.

(나) 존 매킨(John Machin)은 런던에 있는 Gresham College 의 천문학과 교수였는데 π를 근사하는 독특한 공식을 발견한 것으로 유명하다. 예각 ϕ를 **그림** 1에서와 같이 $\tan\phi=\frac{1}{5}$을 만족하도록 잡자.



$$\tan\phi = \frac{1}{5}$$
$$\cos\phi = \frac{5}{\sqrt{26}}$$
$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

그림 1

비슷하게 ψ를 $\tan\psi = \dfrac{1}{239}$을 만족하도록 잡으면 다음 식이 성립한다.

$$4\phi - \psi = \frac{\pi}{4} \qquad (ㄴ)$$

식 (ㄴ)을 좌우변의 탄젠트 값을 비교하여 확인해 보자. 탄젠트에 대한 배각 공식을 반복 적용한 후 덧셈정리를 적용하면

$$\tan2\phi = \frac{2\cdot 1/5}{1-(1/5)^2} = \frac{5}{12},\quad \tan4\phi = \frac{2\cdot\tan2\phi}{1-\tan^2 2\phi} = \frac{2\cdot 5/12}{1-(5/12)^2} = \frac{120}{119},$$
$$\tan(4\phi-\psi) = \frac{120/119 - 1/239}{1+120/119\cdot 1/239} = 1$$

을 얻는다. $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ 이므로 공식 (ㄴ)이 성립한다.

[문제 2-1] <20점> 제시문 (가)의 내용을 바탕으로 다음 물음에 답하라.

1) <10점> $\sin(20^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\cdot\sin(80^\circ)$ 을 구하라.

2) <10점> 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{7}$$
$$a_{n+1} = a_n\cos\frac{\pi}{7\cdot 2^n},\quad n = 1, 2, \ldots$$

극한 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 을 구하라.

[문제 2-2] <20점> 점 $(1,0)$을 출발하여, 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 움직이는 점 P를 생각하자. 열린구간 $(-1,1)$의 수 t에 대하여, 점 P의 x좌표가 처음으로 t가 될 때까지 이동한 거리를 $\alpha(t)$, 점 P의 y좌표가 처음으로 t가 될 때까지 이동한 거리를 $\beta(t)$라 하고 $f(t)=\sin(2\alpha(t))+\cos(2\beta(t))$로 정의하자.

1) <10점> 함수 $f(t)$를 삼각함수를 사용하지 않고 나타내라.
2) <10점> 열린구간 $(-1,1)$에서 $f'(t)=0$인 t를 모두 구하라.

[문제 2-3] <10점> 자연수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{P}(1,a)$, $\mathrm{Q}(b,1)$를 생각하자. 원점 O를 중심으로 점 P를 시곗바늘이 도는 방향과 같은 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전한 점을 P$'$, 점 Q를 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 γ만큼(단, γ는 $\tan\gamma=\frac{1}{2}$ 인 예각) 회전한 점을 Q$'$이라 하자. 세 점 O, P$'$, Q$'$이 일직선 위에 있도록 하는 자연수 a, b의 쌍을 모두 구하라. (단, $2 \le a < b$)

2014학년도 논술 고사 모범답안 자연계열

문제 1 (50점)

[문제 1-1] <10 점> **정리** 1을 이용하여 1부터 10^4까지의 자연수 중 4의 배수도 6의 배수도 아닌 것의 개수를 구하라.

풀이 전체집합 $U = \{1, 2, \cdots, 10^4\}$,
$A_1 = \{n \in U : n$은 4의 배수$\}$, $A_2 = \{n \in U : n$은 6의 배수$\}$라 하면 원하는 수는 $n(A_1^c \cap A_2^c)$이다. $N_1 = n(A_1) + n(A_2) = 2500 + 1666 = 4166$, $N_2 = n(A_1 \cap A_2) = 833$ 이므로 **정리** 1에 의하여 $n(A_1^c \cap A_2^c) = 10000 - 4166 + 833 = 6667$ 이다.

[문제 1-2] <20점> (그림 3)의 체스판에 **4개**의 돌을 각 행과 각 열에 많아야 한 개 놓는 방법들의 집합을 U라 하고, $i = 1, 2, 3, 4, 5$에 대하여 U의 원소 중 E_i 에 반드시 돌을 놓는 방법들의 집합을 A_i라 하자.

1) <15점> $n(A_1)$을 구하라.

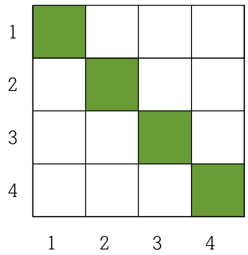
2) <5점> $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c$ 의 원소는 어떤 방법인지 설명하라.

1					E_1
2				E_2	
3	E_3				
4		E_4			
5			E_5		
	1	2	3	4	5

풀이 1) E_1에 돌을 놓아야하므로 1행과 5열을 제외한 나머지 4×4체스판에 3**개**의 돌을 각 행과 각 열에 기껏해야 하나씩만 놓는 방법의 수를 계산하면 된다. 4개의 행 가운데 돌이 놓이지 않는 한 행과, 4개의 열 가운데 돌이 놓이지 않는 한 열을 선택하는 방법이 $4 \times 4 = 16$ 가지이며 나머지 3×3체스판에 세 개의 돌을 놓는 방법은 $3! = 6$이므로 $n(A_1) = 16 \times 6 = 96$이다. $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c$의 원소들은 E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$에 모두 돌을 놓지 않는 방법이다.

2) $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c$의 원소들은 E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$에 모두 돌을 놓지 않는 방법이다.

[문제 1-3] <20점> (그림 4)의 체스판에 **4개**의 돌을 각 행과 각 열에 하나의 돌만 있도록 놓는 방법을 생각해 보자. 검게 칠해져 있는 자리에는 돌을 놓을 수 없다면 몇 가지 방법이 있는지 제시문 (가)의 정리를 이용하여 구하라.



(그림 4)

풀이 전체집합 U는 바둑판 $B(5)$의 각행과 열에 하나씩 다섯 개의 바둑돌을 놓는 방법들의 집합. A_i, $i=1,2,\cdots,5$, 는 각각 i번째 행의 색이 칠해진 부분에 돌을 놓는 방법들의 집합이라고 하자. 우리가 원하는 방법은 색이 칠해진 부분에 돌을 전혀 놓지 않는 것이므로 $A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_5^c$의 원소의 개수를 세는 것과 같다.

$n(U) = 4! = 24$

$N_1 = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) = 3! \times 4 = 24$

$N_2 = n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_4) + n(A_3 \cap A_4)$
$= 2! \times 6 = 12$

$N_3 = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 4$

$N_3 = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1$

이므로 $n(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$ 이다.

[문제 2-1] <20점> 제시문 (가)의 내용을 바탕으로 다음 물음에 답하라.

1) $\sin(20^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\cdot\sin(80^\circ)$ 을 구하라.

2) 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{7}$$
$$a_{n+1} = a_n \cos\frac{\pi}{7\cdot 2^n},\ n=1,2,\ldots$$

극한 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 을 구하라.

<u>**풀이**</u> 곱을 합·차로 고치는 공식을 반복 적용하면

1)
$$\begin{aligned}\sin(20^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\cdot\sin(80^\circ) &= -\frac{1}{2}\left(\cos(100^\circ)-\cos(60^\circ)\right)\cdot\sin(40^\circ)\\ &= -\frac{1}{2}\cos(100^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\\ &\quad +\frac{1}{2}\cos(60^\circ)\cdot\sin(40^\circ)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\sin(140^\circ)-\sin(60^\circ)\right)+\frac{1}{4}\sin(40^\circ)\\ &= \frac{1}{4}\sin(60^\circ)+\frac{1}{4}\left(-\sin(140^\circ)+\sin(40^\circ)\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

2) 사인 함수에 대한 배각 공식에 의하여

$$\begin{aligned}a_n \sin\frac{\pi}{7\cdot 2^{n-1}} &= \cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7\cdot 2}\cdots\cos\frac{\pi}{7\cdot 2^{n-1}}\cdot\sin\frac{\pi}{7\cdot 2^{n-1}}\\ &= 2^{-n}\sin\frac{2\pi}{7}\end{aligned}$$

이 성립하므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 아래와 같이 주어진다.

$$a_n = \frac{2^{-n}\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7\cdot 2^{n-1}}}$$

삼각함수의 극한에 관한 공식 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 으로부터 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\frac{2\pi}{7}}$ 을 얻는다.

[문제 2-2] <20점> 점 $(1,0)$을 출발하여, 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 시곗바늘이 도는 방향과 <u>반대인 방향</u>으로 움직이는 점 P를 생각하자. 열린구간 $(-1,1)$의 수 t에 대하여, 점 P의 x좌표가 처음으로 t가 될 때까지 이동한 거리를 $\alpha(t)$, y좌표가 처음으로 t가 될 때까지 이동한 거리를 $\beta(t)$라 하고 $f(t)=\sin(2\alpha(t))+\cos(2\beta(t))$로 정의하자.

1) <10점> 함수 $f(t)$를 삼각함수를 사용하지 않고 나타내라.

2) <10점> 열린구간 $(-1,1)$에서 $f'(t)=0$인 t를 모두 구하라.

<u>풀이</u> 1) 단위원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 대응하므로, 사인과 코사인의 배각 공식에 의하여

$\sin(2\alpha(t)) = 2\sin(\alpha(t))\cos(\alpha(t)) = 2t\sqrt{1-t^2}$
$\cos(2\alpha(t)) = 1-2\sin^2(\alpha(t)) = 1-2t^2$

을 얻는다. 이로부터 $f(t) = 2t\sqrt{1-t^2} + 1 - 2t^2$ 임을 알 수 있다.

2) 함수 $f(t)$를 미분하면, $f'(t) = 2\sqrt{1-t^2} - \dfrac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}} - 4t$ 이다. $f'(t)=0$에서 $1-2t^2 = 2t\sqrt{1-t^2}$ 이다. 양변을 제곱하여 정리하면 $8t^4-8t^2+1=0$, 따라서 $t^2 = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}$ 이다. 한편, t와 $1-2t^2$ 의 부호는 같아야 하므로 $f'(t)=0$ 의 근은 $t = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 이다.

[문제 2-3] <10점> 자연수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{P}(1,a)$, $\mathrm{Q}(b,1)$를 생각하자. 원점 O를 중심으로 점 P를 시곗바늘이 도는 방향과 <u>같은 방향</u>으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전한 점을 P′, 점 Q를 시곗바늘이 도는 방향과 <u>반대인 방향</u>으로 γ만큼(단, γ는 $\tan\gamma = \frac{1}{2}$ 인 예각) 회전한 점을 Q′이라 하자. 세 점 O, P′, Q′이 일직선 위에 있도록 하는 자연수 a, b의 쌍을 모두 구하라. (단, $2 \le a < b$)

풀이 $\tan\phi = \dfrac{1}{a}$, $\tan\psi = \dfrac{1}{b}$ 인 예각 ϕ, ψ를 생각하자. 문제의 조건은 아래 조건과 동등하다.

$$(*) \qquad \frac{\pi}{4} - \gamma = \phi + \psi$$

탄젠트에 대한 덧셈정리로부터

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\tan(\phi+\psi) = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{a}\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{ab-1}$$

을 얻는다. 식 (*)에 의하여 $\frac{a+b}{ab-1}=\frac{1}{3}$, 즉

$ab-3b-3a-1=0$를 얻는다. 식을 정리하면 $(a-3)(b-3)=10$이다.

이 식을 만족하는 자연수의 쌍은 $(4,13)$, $(5,8)$ 이다.